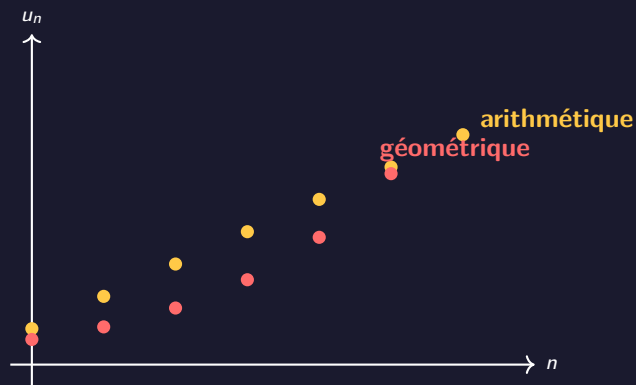


FICHE 01

# Suites numériques

Modes de génération ■ Suites arithmétiques & géométriques ■ Sommes & limites



Première ■ Spécialité Mathématiques ■ Programme officiel



## Table des matières

<b>1</b>	<b>Pourquoi étudier les suites ?</b>	<b>3</b>
1.1	Le problème fondamental . . . . .	3
1.2	L'idée directrice . . . . .	3
<b>2</b>	<b>L'idée avant la formule</b>	<b>4</b>
2.1	Une suite, c'est quoi vraiment ? . . . . .	4
2.2	Deux façons de fabriquer une suite . . . . .	4
2.3	Les deux modèles rois . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Le cours complet</b>	<b>6</b>
3.1	Définition et notations . . . . .	6
3.2	Les modes de génération d'une suite . . . . .	6
3.3	Représentation graphique d'une suite . . . . .	8
3.4	Sens de variation d'une suite . . . . .	8
3.5	Suites arithmétiques . . . . .	9
3.6	Suites géométriques . . . . .	11
3.7	Taux d'évolution et modélisation . . . . .	14
3.8	Limite d'une suite : une approche intuitive . . . . .	14
<b>4</b>	<b>Boîte à outils : Réflexes pour le bac</b>	<b>16</b>
<b>5</b>	<b>Exercices</b>	<b>18</b>
<b>6</b>	<b>Problème : <i>La Tour de Hanoï</i> ★★★</b>	<b>22</b>
<b>7</b>	<b>✓ Corrigés détaillés</b>	<b>24</b>

# 1 Pourquoi étudier les suites ?

## 1.1 Le problème fondamental

Beaucoup de phénomènes du monde réel n'évoluent pas *en continu*, mais à *temps discret* : ils changent par étapes, mois par mois, année par année, génération par génération. Combien vaudra mon épargne dans 10 ans ? Quelle sera la population d'une ville dans 20 ans ? Combien reste-t-il d'un médicament dans le sang après chaque prise ?

Pour modéliser ce genre de situations, on a besoin d'un objet mathématique qui associe à chaque étape (un entier  $n$ ) une valeur (un nombre  $u_n$ ). Cet objet, c'est une **suite numérique**.

**Épargne**  
capital placé à  
intérêts composés

**Démographie**  
population qui  
croît chaque année

**Radioactivité**  
noyaux qui se  
désintègrent

**Médecine**  
dose de  
médicament  
dans le sang

**Épargne.** Un capital de 1000 € placé à 3 % par an est multiplié par 1,03 chaque année. Après 1 an : 1030 € ; après 2 ans : 1060,90 €. ... On reconnaît une **suite géométrique**.

**Démographie.** Une ville gagne 500 habitants chaque année : on ajoute toujours la même quantité. C'est une **suite arithmétique**.

**Radioactivité.** À chaque période, la moitié des noyaux disparaît : on multiplie par  $\frac{1}{2}$ . Encore une **suite géométrique**, mais décroissante.

**Médecine.** Le corps élimine 30 % du médicament entre deux prises, et on réajoute une dose fixe : c'est une combinaison des deux, une suite dite **arithmético-géométrique** (on la rencontrera dans le problème final).

## 1.2 L'idée directrice

### L'idée directrice :

Une suite est une **liste infinie de nombres ordonnés**, numérotés par les entiers. On peut la fabriquer de deux façons : en donnant une **formule directe**  $u_n = f(n)$ , ou en disant comment passer d'un terme au suivant ( $u_{n+1} = f(u_n)$ ). Deux modèles dominent tout le programme : on **ajoute toujours la même chose** (arithmétique) ou on **multiplie toujours par la même chose** (géométrique).

### Intuition | Pourquoi c'est un chapitre clé

Les suites sont le **premier contact** avec l'idée d'infini et de limite, qui irrigue ensuite toute l'analyse (fonctions, exponentielle, et en Terminale les limites, les intégrales...). Maîtriser les suites en Première, c'est se donner des fondations solides pour deux ans de maths. De plus, c'est un chapitre où **tout se démontre proprement** : c'est l'occasion idéale d'apprendre à rédiger.

## 2 L'idée avant la formule

### 2.1 Une suite, c'est quoi vraiment ?

#### Intuition | L'immeuble infini

Imagine un immeuble qui a une infinité d'étages, numérotés  $0, 1, 2, 3, \dots$ . À chaque étage  $n$ , il y a une **valeur affichée** : c'est  $u_n$ .

La suite, ce n'est pas un seul nombre : c'est **la règle qui dit ce qui est affiché à chaque étage**. On note la suite entière  $(u_n)$  (avec les parenthèses), et on note  $u_n$  (sans parenthèses) la valeur d'un étage particulier, le **terme de rang  $n$** .

**Ne confonds jamais** :  $(u_n)$  est la suite (l'immeuble entier) ;  $u_n$  est un nombre (l'affichage d'un étage).

### 2.2 Deux façons de fabriquer une suite

#### Intuition | Le GPS et le pas à pas

Pour atteindre un étage, tu as deux stratégies :

**1) La formule explicite  $u_n = f(n)$  : le GPS.** Tu peux te « téléporter » directement à n'importe quel étage. Pour connaître  $u_{100}$ , tu remplaces  $n$  par 100 dans la formule. *Rapide, direct.*

**2) La relation de récurrence  $u_{n+1} = f(u_n)$  : le pas à pas.** Tu connais le rez-de-chaussée ( $u_0$ ) et tu sais comment passer d'un étage au suivant. Pour connaître  $u_{100}$ , tu dois gravir les 100 marches une par une. *Plus lent, mais souvent c'est la seule description naturelle d'un phénomène.*

Une grande partie du travail sur les suites consiste à **passer d'une description à l'autre** : transformer un « pas à pas » en « GPS ».

### 2.3 Les deux modèles rois

#### Intuition | Ajouter vs multiplier

**Suite arithmétique : l'escalier régulier.** À chaque étape, on **ajoute** toujours le même nombre  $r$  (la **raison**). Les termes montent (ou descendent) d'une marche de hauteur constante. Traçés, les points sont **alignés** : c'est le pendant discret d'une **fonction affine**.

**Suite géométrique : la boule de neige.** À chaque étape, on **multiplie** toujours par le même nombre  $q$  (la **raison**). Au début ça semble lent, puis ça s'emballe : c'est l'**effet boule de neige** (ou l'effet « intérêts composés »). C'est le pendant discret de la **fonction exponentielle**.

	Arithmétique	Géométrique
On passe au suivant en...	<b>ajoutant</b> $r$	<b>multipliant</b> par $q$
Modèle du réel	croissance <b>linéaire</b>	croissance <b>exponentielle</b>
Fonction analogue	affine $f(x) = ax + b$	exponentielle $f(x) = b q^x$

### Intuition | L'échiquier de Sissa : la puissance du multiplicatif

La légende raconte que l'inventeur des échecs demanda au roi 1 grain de blé sur la 1<sup>re</sup> case, 2 sur la 2<sup>e</sup>, 4 sur la 3<sup>e</sup>, et ainsi de suite en **doublant** à chaque case (suite géométrique de raison 2). Sur la 64<sup>e</sup> case :  $2^{63}$  grains. Total :  $2^{64} - 1 \approx 1,8 \times 10^{19}$  grains, soit des **milliers d'années** de production mondiale. Une suite arithmétique (+1 grain à chaque case) aurait donné... 64 grains. **Voilà toute la différence entre ajouter et multiplier.**

### 3 Le cours complet

#### 3.1 Définition et notations

##### Définition | Suite numérique

Une **suite numérique**  $u$  est une fonction de  $\mathbb{N}$  (ou d'une partie de  $\mathbb{N}$  du type  $\{n_0, n_0 + 1, \dots\}$ ) vers  $\mathbb{R}$ , qui à tout entier  $n$  associe un réel noté  $u_n$ .

- $u_n$  se lit «  $u$  indice  $n$  » : c'est le **terme de rang**  $n$  (ou d'indice  $n$ ).
- $u_0$  est le **terme initial** (premier terme),  $u_1$  le terme suivant, etc.
- La suite **entière** se note  $(u_n)$ ,  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , ou  $(u_n)_{n \geq 0}$ .

**Notations équivalentes** : on peut écrire  $u_n$  ou  $u(n)$ , et la suite  $(u_n)$  ou  $(u(n))$ . La notation « indice »  $u_n$  est la plus courante.

##### Attention | Rang et valeur : ne pas confondre

Le **rang**  $n$  est la « place » dans la liste (un entier :  $0, 1, 2, \dots$ ). La **valeur**  $u_n$  est le nombre rangé à cette place (un réel quelconque). Dire « le terme  $u_5$  » désigne la *valeur* ; dire « le terme de rang 5 » désigne la même valeur. Mais 5 et  $u_5$  n'ont aucune raison d'être égaux !

#### 3.2 Les modes de génération d'une suite

Le programme distingue plusieurs façons de **définir** une suite. Les connaître, c'est savoir lire un énoncé.

##### Définition | Forme explicite

Une suite est donnée sous **forme explicite** lorsqu'on dispose d'une formule  $u_n = f(n)$  qui exprime  $u_n$  **directement en fonction du rang**  $n$ .

##### Exemple | Forme explicite

Soit  $u_n = 2n^2 - 3$ . On calcule directement n'importe quel terme :

$$u_0 = 2 \times 0^2 - 3 = -3, \quad u_1 = 2 - 3 = -1, \quad u_5 = 2 \times 25 - 3 = 47.$$

Pas besoin de connaître les termes précédents : on « se téléporte ».

##### Définition | Forme récursive

Une suite est donnée par **récurrence** lorsqu'on connaît :

- son **premier terme** (par exemple  $u_0$ ) ;
- une **relation de récurrence**  $u_{n+1} = f(u_n)$  qui exprime chaque terme à partir du précédent.

Il faut **les deux** : la relation seule ne suffit pas, il faut savoir d'où l'on part.

**Exemple | Forme récurrente**

Soit  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 2$  et  $u_{n+1} = 3u_n - 1$ . On avance pas à pas :

$$u_1 = 3 \times 2 - 1 = 5, \quad u_2 = 3 \times 5 - 1 = 14, \quad u_3 = 3 \times 14 - 1 = 41.$$

Pour obtenir  $u_3$ , on a **dû** calculer  $u_1$  et  $u_2$  avant.

**Attention | L'erreur classique sur la récurrence**

Dans  $u_{n+1} = 3u_n - 1$ , le terme  $u_{n+1}$  **n'est pas**  $3n - 1$ . On ne remplace pas  $u_n$  par  $n$  ! Le  $u_n$  désigne la *valeur* du terme précédent, pas le rang. Tant qu'on n'a pas trouvé de formule explicite, on **ne peut pas** sauter directement à  $u_{100}$ .

**Définition | Génération par algorithme ou par motif**

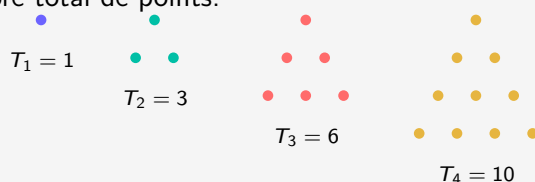
On peut aussi définir une suite :

- par un **algorithme** (un programme qui calcule  $u_n$ , voir §4) ;
- par un **motif géométrique ou combinatoire** : le terme  $u_n$  compte des objets dans une configuration qui dépend de  $n$  (nombres figurés, dallages, etc.).

Un enjeu fréquent est alors de **retrouver une formule** (explicite ou par récurrence) à partir du motif.

**Exemple | Un motif géométrique : les nombres triangulaires**

On empile des points en triangle : 1 point, puis une rangée de 2, puis de 3... Le  $n$ -ième nombre triangulaire  $T_n$  est le nombre total de points.



On passe d'un triangle au suivant en ajoutant une rangée de  $n + 1$  points :  $T_{n+1} = T_n + (n + 1)$  (récurrence). On verra que la formule explicite est  $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$ .

**Méthode | Passer du « pas à pas » au « GPS »**

Pour **conjecturer une formule explicite** à partir d'une récurrence ou d'un motif :

1. Calcule les premiers termes  $u_0, u_1, u_2, u_3, u_4$ .
2. Cherche une régularité : différences constantes ( $\rightarrow$  **arithmétique**), rapports constants ( $\rightarrow$  **géométrique**), carrés, factorielles...
3. Conjecture une formule, puis **vérifie-la** sur les termes déjà calculés.

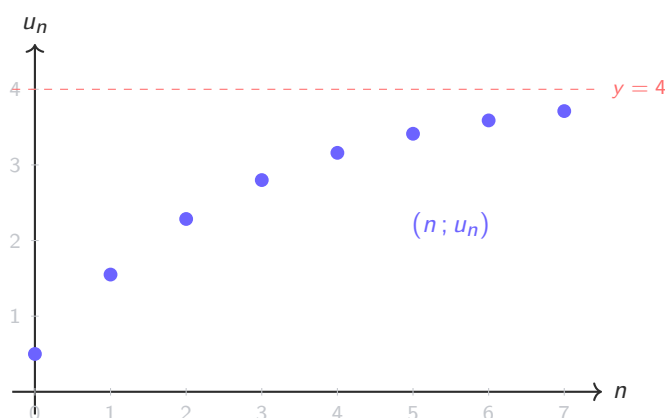
En Première, la démonstration complète d'une telle formule par récurrence n'est *pas* exigible (c'est un outil de Terminale) : on se contente de conjecturer et de vérifier, sauf pour les suites arithmétiques

et géométriques où la formule se prouve directement.

### 3.3 Représentation graphique d'une suite

#### Méthode | Tracer une suite

Une suite se représente par un **nuage de points** : pour chaque rang  $n$  (en abscisse), on place le point  $(n; u_n)$  (en ordonnée). **On ne relie pas les points** : une suite n'est définie que sur les entiers.



Ici les points « s'approchent » de la droite  $y = 4$  : c'est une première image de la notion de **limite** (§ 3.7). Pour une suite définie par récurrence  $u_{n+1} = f(u_n)$ , on utilise aussi le **diagramme en escalier** (ou « toile d'araignée »), tracé à partir de la courbe de  $f$  et de la droite  $y = x$ .

### 3.4 Sens de variation d'une suite

#### Définition | Suite croissante, décroissante, monotone

Soit  $(u_n)$  une suite.

- $(u_n)$  est **croissante** lorsque, pour tout  $n$ ,  $u_{n+1} \geq u_n$  (chaque terme est plus grand que le précédent).
- $(u_n)$  est **décroissante** lorsque, pour tout  $n$ ,  $u_{n+1} \leq u_n$ .
- $(u_n)$  est **constante** lorsque, pour tout  $n$ ,  $u_{n+1} = u_n$ .
- $(u_n)$  est **monotone** lorsqu'elle est croissante ou décroissante (elle ne change pas de sens).

On parle de croissance/décroissance **stricte** avec  $>$  ou  $<$  au lieu de  $\geq$ ,  $\leq$ .

#### Attention | « Pour tout $n$ » : un mot qui change tout

Étudier le sens de variation, ce n'est **pas** regarder deux ou trois termes. Si  $u_0 < u_1 < u_2$ , la suite n'est pas forcément croissante : il faut le prouver **pour tout**  $n$ . Une suite peut très bien monter au début puis redescendre (par exemple  $u_n = n(10 - n)$ ).



### Méthode | Les trois méthodes pour le sens de variation

**Méthode 1 : Étudier le signe de  $u_{n+1} - u_n$  (la plus universelle).**

On calcule et on simplifie  $u_{n+1} - u_n$ , puis on regarde son signe :

$$u_{n+1} - u_n > 0 \text{ pour tout } n \implies (u_n) \text{ strictement croissante.}$$

**Méthode 2 : Comparer le rapport  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  à 1** (uniquement si tous les termes sont **strictement positifs**).

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1 \text{ pour tout } n \implies (u_n) \text{ strictement croissante.}$$

**Méthode 3 : Utiliser la fonction associée** : si  $u_n = f(n)$  avec  $f$  **monotone** sur  $[0; +\infty[$ , alors  $(u_n)$  a le même sens de variation que  $f$ .

**Quel choix ?** Méthode 1 presque toujours ; Méthode 2 si la suite est définie par des **produits/puissances** (typiquement géométrique) ; Méthode 3 si  $u_n = f(n)$  avec  $f$  déjà étudiée.

### Attention | Le piège de la Méthode 3

La Méthode 3 ne marche que si  $u_n = f(n)$  est une **forme explicite**. Pour une suite **récurrente**  $u_{n+1} = f(u_n)$ , le sens de variation de  $f$  ne donne *pas* directement celui de  $(u_n)$  : surtout ne confonds pas ces deux situations !

### Exemple | Les trois méthodes en action

(1)  $u_n = n^2 - 4n$ . Alors  $u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - 4(n+1) - (n^2 - 4n) = 2n - 3$ . Ce signe dépend de  $n$  : négatif pour  $n \leq 1$ , positif pour  $n \geq 2$ . La suite **décroît puis croît** (elle n'est pas monotone).

(2)  $u_n = \frac{2^n}{n!}$  ( $n \geq 1$ , termes  $> 0$ ).  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{2^n} = \frac{2}{n+1}$ . Ce rapport est  $< 1$  dès que  $n+1 > 2$ , soit  $n \geq 2$ . La suite est donc **décroissante à partir du rang 2**.

(3)  $u_n = \sqrt{n+1}$ . La fonction  $f(x) = \sqrt{x+1}$  est croissante sur  $[0; +\infty[$ , donc  $(u_n)$  est **croissante**.

## 3.5 Suites arithmétiques

### Définition | Suite arithmétique

Une suite  $(u_n)$  est **arithmétique** lorsqu'on passe de chaque terme au suivant en **ajoutant toujours le même nombre  $r$** , appelé la **raison** :

$$u_{n+1} = u_n + r \quad \text{pour tout } n.$$

De façon équivalente :  $(u_n)$  est arithmétique si et seulement si la différence  $u_{n+1} - u_n$  est **constante** (égale à  $r$ ).

### Méthode | Reconnaître une suite arithmétique

Pour prouver qu'une suite est arithmétique : calcule  $u_{n+1} - u_n$  et montre que le résultat **ne dépend pas de  $n$** . La valeur obtenue est la raison  $r$ .

**Contre-exemple utile** : il ne suffit *pas* que  $u_1 - u_0 = u_2 - u_1$  ; il faut l'égalité **pour tout  $n$** .

### ★ Théorème | Terme général d'une suite arithmétique

Si  $(u_n)$  est arithmétique de raison  $r$  et de premier terme  $u_0$ , alors pour tout  $n$  :

$$u_n = u_0 + n r.$$

Plus généralement, à partir de n'importe quel terme  $u_p$  :

$$u_n = u_p + (n - p) r.$$

### Démonstration | Terme général arithmétique (exigible)

Partons de  $u_0$  et appliquons la relation  $u_{k+1} = u_k + r$  à chaque étape, de  $k = 0$  jusqu'à  $k = n - 1$ . On « empile » les  $r$  :

$$u_1 = u_0 + r, \quad u_2 = u_1 + r = u_0 + 2r, \quad u_3 = u_2 + r = u_0 + 3r, \quad \dots$$

À chaque marche on ajoute exactement un  $r$ . Après  $n$  marches, on a ajouté  $n$  fois la raison :

$$u_n = u_0 + \underbrace{r + r + \dots + r}_{n \text{ fois}} = u_0 + n r.$$

(En Terminale, cet « ... » se justifie rigoureusement par récurrence ; en Première, l'argument d'empilement suffit et constitue la démonstration attendue.) ■

### ✓ Propriété | Sens de variation d'une suite arithmétique

Le sens de variation d'une suite arithmétique ne dépend **que du signe de la raison  $r$**  :

- si  $r > 0$  : la suite est **strictement croissante** ;
- si  $r < 0$  : la suite est **strictement décroissante** ;
- si  $r = 0$  : la suite est **constante**.

En effet  $u_{n+1} - u_n = r$ , dont le signe est celui de  $r$ .

### Intuition | Arithmétique = affine

Comme  $u_n = u_0 + n r = \underbrace{r}_{\text{pente}} \cdot n + \underbrace{u_0}_{\text{ordonnée à l'origine}}$ , les points  $(n; u_n)$  sont **alignés** sur une droite de coefficient directeur  $r$ . Une suite arithmétique, c'est la « version discrète » d'une fonction affine  $f(x) = rx + u_0$ .

### ★ Théorème | Somme des termes : $1 + 2 + \dots + n$

Pour tout entier  $n \geq 1$  :

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

*Démonstration | La somme de Gauss (exigible)*

Notons  $S = 1 + 2 + 3 + \dots + n$ . Écrivons cette même somme à l'endroit, puis à l'envers, et additionnons colonne par colonne :

$$\begin{array}{rcccccccc} S = & 1 & + & 2 & + \dots + & (n-1) & + & n \\ S = & n & + & (n-1) & + \dots + & 2 & + & 1 \\ \hline 2S = & (n+1) & + & (n+1) & + \dots + & (n+1) & + & (n+1) \end{array}$$

Chaque colonne vaut  $n+1$ , et il y a  $n$  colonnes. Donc  $2S = n(n+1)$ , d'où  $S = \frac{n(n+1)}{2}$ .  
(C'est l'astuce que le jeune Gauss aurait trouvée à l'école pour additionner 1 à 100 : réponse  $\frac{100 \times 101}{2} = 5050$ .) ■

### ✓ Propriété | Somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique

La somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique vaut :

$$\text{somme} = (\text{nombre de termes}) \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}.$$

Par exemple  $u_0 + u_1 + \dots + u_n = (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2}$ .

### Exemple | Une somme arithmétique concrète

Combien font  $7 + 10 + 13 + \dots + 97$  ? C'est une somme arithmétique de raison 3. Nombre de termes : de 7 à 97 par pas de 3, il y a  $\frac{97-7}{3} + 1 = 31$  termes. Donc

$$7 + 10 + \dots + 97 = 31 \times \frac{7 + 97}{2} = 31 \times 52 = 1612.$$

## 3.6 Suites géométriques

### Définition | Suite géométrique

Une suite  $(u_n)$  est **géométrique** lorsqu'on passe de chaque terme au suivant en **multipliant toujours par le même nombre  $q$** , appelé la **raison** :

$$u_{n+1} = q \times u_n \quad \text{pour tout } n.$$

De façon équivalente (si les termes sont non nuls) :  $(u_n)$  est géométrique si et seulement si le rapport  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  est **constant** (égal à  $q$ ).

### Méthode | Reconnaître une suite géométrique

Pour prouver qu'une suite (à termes non nuls) est géométrique : calcule le rapport  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  et montre qu'il **ne dépend pas de  $n$** . La valeur obtenue est la raison  $q$ .

**Astuce** : dès qu'un énoncé dit « augmente de  $t\%$  » ou « diminue de  $t\%$  » à chaque étape, c'est géométrique de raison  $q = 1 + \frac{t}{100}$  (hausse) ou  $q = 1 - \frac{t}{100}$  (baisse).

### ★ Théorème | Terme général d'une suite géométrique

Si  $(u_n)$  est géométrique de raison  $q$  et de premier terme  $u_0$ , alors pour tout  $n$  :

$$u_n = u_0 \times q^n.$$

Plus généralement, à partir de n'importe quel terme  $u_p$  :  $u_n = u_p \times q^{n-p}$ .

#### Démonstration | Terme général géométrique (exigible)

Partons de  $u_0$  et appliquons  $u_{k+1} = q u_k$  à chaque étape. Cette fois on « empile » des facteurs  $q$  :

$$u_1 = q u_0, \quad u_2 = q u_1 = q^2 u_0, \quad u_3 = q u_2 = q^3 u_0, \quad \dots$$

Après  $n$  étapes, on a multiplié  $n$  fois par  $q$  :

$$u_n = u_0 \times \underbrace{q \times q \times \dots \times q}_{n \text{ fois}} = u_0 q^n.$$

■

### ✓ Propriété | Sens de variation d'une suite géométrique (raison $q > 0$ , $u_0 > 0$ )

Si  $u_0 > 0$  et  $q > 0$ , le sens de variation ne dépend que de la position de  $q$  par rapport à 1 :

- si  $q > 1$  : suite **strictement croissante** (explosion) ;
- si  $0 < q < 1$  : suite **strictement décroissante** (vers 0) ;
- si  $q = 1$  : suite **constante**.

**Si  $q < 0$** , la suite est **alternée** (les termes changent de signe) : elle n'est ni croissante ni décroissante.

#### Démonstration | Sens de variation géométrique

Avec  $u_0 > 0$  et  $q > 0$ , tous les termes  $u_n = u_0 q^n$  sont  $> 0$ . On compare le rapport à 1 :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = q.$$

Si  $q > 1$ , le rapport est  $> 1$  : chaque terme est plus grand que le précédent, la suite croît. Si  $0 < q < 1$ , le rapport est  $< 1$  : la suite décroît. Si  $q = 1$ , elle est constante. Si  $q < 0$ ,  $u_n$  et  $u_{n+1}$  sont de signes opposés : pas de monotonie. ■

### Intuition | Géométrie = exponentielle discrète

$u_n = u_0 q^n$  : le rang  $n$  est en **exposant**. C'est exactement la forme d'une **fonction exponentielle**  $x \mapsto u_0 q^x$ . Suite géométrique et fonction exponentielle décrivent le même phénomène (croissance à taux constant), l'une à temps discret, l'autre à temps continu. On redécouvrira ce lien dans la fiche sur l'exponentielle.

### ★ Théorème | Somme des puissances : $1 + q + q^2 + \dots + q^n$

Pour tout réel  $q \neq 1$  et tout entier  $n \geq 0$  :

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n = \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

(Si  $q = 1$ , la somme vaut simplement  $n + 1$ .)

### Démonstration | Somme géométrique (exigible)

Notons  $S = 1 + q + q^2 + \dots + q^n$ . Multiplions tout par  $q$  :

$$qS = q + q^2 + q^3 + \dots + q^{n+1}.$$

Soustrayons les deux lignes : presque tous les termes se **télescopent** (s'annulent deux à deux) :

$$S - qS = (1 + q + \dots + q^n) - (q + q^2 + \dots + q^{n+1}) = 1 - q^{n+1}.$$

Donc  $S(1 - q) = 1 - q^{n+1}$ , et comme  $q \neq 1$  on peut diviser :

$$S = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

■

### ✓ Propriété | Somme de termes consécutifs d'une suite géométrique

Pour une suite géométrique de raison  $q \neq 1$  :

$$u_0 + u_1 + \dots + u_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = (\text{premier terme}) \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q}.$$

**Exemple | Une somme géométrique concrète**

Calculons  $1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^{10}$  (raison  $q = 2$ , 11 termes, du rang 0 au rang 10) :

$$\sum_{k=0}^{10} 2^k = \frac{1 - 2^{11}}{1 - 2} = \frac{1 - 2048}{-1} = 2047.$$

**3.7 Taux d'évolution et modélisation****Méthode | Du pourcentage à la suite géométrique**

Une grandeur qui évolue à **taux constant**  $t\%$  à chaque période est modélisée par une suite géométrique de raison le **coefficient multiplicateur** :

$$q = 1 + \frac{t}{100}.$$

- **Hausse** de 5 % :  $q = 1,05$ .    **Baisse** de 5 % :  $q = 0,95$ .
- Plusieurs évolutions successives se **multiplient** : une hausse de 20 % puis une baisse de 20 % donne  $1,20 \times 0,80 = 0,96$ , soit une **baisse** globale de 4 % (et non un retour au point de départ !).

**Exemple | Épargne à intérêts composés**

On place  $C_0 = 2000$  € à 4 % par an. Le capital  $C_n$  après  $n$  années vérifie  $C_{n+1} = 1,04 C_n$  : c'est géométrique de raison 1,04. Donc  $C_n = 2000 \times 1,04^n$ . Après 10 ans :  $C_{10} = 2000 \times 1,04^{10} \approx 2960,49$  €. Le capital a été multiplié par environ 1,48.

**3.8 Limite d'une suite : une approche intuitive****Attention | Au programme de Première : l'intuition seulement**

En Première, la notion de limite est introduite **intuitivement**, sur des exemples et des calculs numériques. **Aucune définition formelle** (du type « pour tout  $\varepsilon \dots$  ») n'est exigible : cela viendra en Terminale. On se contente de **conjecturer** le comportement.

**Définition | Limite, version intuitive**

- On dit que  $(u_n)$  **tend vers un réel**  $\ell$  (ou **converge vers**  $\ell$ ) lorsque les termes  $u_n$  « se rapprochent autant qu'on veut » de  $\ell$  quand  $n$  devient très grand. On note  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ .
- On dit que  $(u_n)$  **tend vers**  $+\infty$  lorsque les termes  $u_n$  « deviennent aussi grands qu'on veut » quand  $n$  grandit. (De même pour  $-\infty$ .)
- Une suite qui ne tend ni vers un réel ni vers  $\pm\infty$  est dite **divergente sans limite** (par exemple  $u_n = (-1)^n$ , qui oscille entre  $-1$  et  $1$ ).

**✓ Propriété | Comportement des suites de référence (admis, intuitif)**

- $\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}, \frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0$  (plus on divise par grand, plus c'est petit).
- $n, n^2, \sqrt{n} \rightarrow +\infty$ .
- Pour une suite géométrique  $q^n$  avec  $u_0 > 0$  :
  - si  $q > 1$  :  $q^n \rightarrow +\infty$  (explosion) ;
  - si  $0 < q < 1$  :  $q^n \rightarrow 0$  (extinction) ;
  - si  $q = 1$  : constante égale à 1 ;
  - si  $-1 < q < 0$  :  $q^n \rightarrow 0$  en oscillant.

**Exemple | Conjecturer une limite numériquement**

Soit  $u_n = \frac{3n+1}{n+2}$ . Calculons quelques termes :  $u_0 = 0,5$  ;  $u_{10} \approx 2,58$  ;  $u_{100} \approx 2,95$  ;  $u_{1000} \approx 2,995$ . Les valeurs se rapprochent de 3. On **conjecture**  $\lim u_n = 3$ . (Intuition algébrique :  $\frac{3n+1}{n+2} = \frac{3+1/n}{1+2/n} \rightarrow \frac{3}{1} = 3$ .)

**Méthode | Recherche de seuil**

Une question très fréquente : « à partir de quel rang la suite dépasse-t-elle (ou descend-elle sous) une valeur  $S$  ? » On parle de **recherche de seuil**. Deux façons :

1. **Par le calcul** : résoudre l'inéquation  $u_n > S$  (souvent à l'aide de la calculatrice, ou plus tard du logarithme pour les géométriques).
2. **Par algorithme** : on calcule les termes un par un avec une boucle « tant que » jusqu'à franchir le seuil (voir § 4).

## 4 Boîte à outils : Réflexes pour le bac

### Méthode | Les réflexes essentiels

1. **Arithmétique ?** Calcule  $u_{n+1} - u_n$ . Si c'est **constant**, oui (raison  $r$ ).
2. **Géométrie ?** Calcule  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ . Si c'est **constant**, oui (raison  $q$ ).
3. **Terme général** : arithmétique  $u_n = u_0 + nr$  ; géométrie  $u_n = u_0 q^n$ . (Attention au **rang du premier terme** : si ça commence à  $u_1$ , c'est  $u_n = u_1 + (n-1)r$ .)
4. **Sens de variation** : étudie le signe de  $u_{n+1} - u_n$  (méthode universelle).
5. **Sommes** :  $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$  ;  $1 + q + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ .
6. **Pourcentage** → **raison** : hausse de  $t\%$  donne  $q = 1 + \frac{t}{100}$  ; baisse,  $q = 1 - \frac{t}{100}$ .
7. **Compter les termes** : de  $u_p$  à  $u_n$ , il y a  $n - p + 1$  termes (et non  $n - p$  !).

### Méthode | Mots-clés à repérer

#### Tu lis dans l'énoncé...

#### Tu penses à...

« augmente/diminue de $t\%$ chaque année »	suite <b>géométrique</b> , $q = 1 \pm \frac{t}{100}$
« augmente de $c$ unités chaque année »	suite <b>arithmétique</b> , $r = c$
« $u_{n+1} = u_n + \dots$ (constante) »	arithmétique
« $u_{n+1} = \dots \times u_n$ »	géométrie
« à partir de quel rang... ? »	recherche de <b>seuil</b> (calcul ou algorithme)
« montrer que $(v_n)$ est géométrique »	calculer $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ et tout exprimer
« somme des termes »	formule de somme arith. ou géo.
« vers quoi tend la suite ? »	<b>conjecturer</b> une limite (table de valeurs)

### Attention | Top 6 des erreurs à éviter

1. **Remplacer  $u_n$  par  $n$**  dans une récurrence.  $u_{n+1} = 2u_n + 1$  n'est pas  $2n + 1$ .
2. **Conclure le sens de variation sur 2-3 termes**. Il faut le signe de  $u_{n+1} - u_n$  **pour tout  $n$** .
3. **Oublier que la Méthode du rapport exige  $u_n > 0$** .
4. **Croire qu'une hausse de 20% puis baisse de 20% revient au départ**. ( $\times 1,2 \times 0,8 = 0,96$ .)
5. **Se tromper dans le nombre de termes** d'une somme ( $n - p + 1$ ).
6. **Confondre  $u_n = u_0 q^n$  et  $u_n = u_1 q^{n-1}$**  selon le rang de départ.



## Méthode | Récapitulatif des formules

	Arithmétique	Géométrique
Relation	$u_{n+1} = u_n + r$	$u_{n+1} = q u_n$
Terme général	$u_n = u_0 + n r$	$u_n = u_0 q^n$
Reconnaître	$u_{n+1} - u_n = r$ constant	$\frac{u_{n+1}}{u_n} = q$ constant
Variation	signe de $r$	position de $q$ vs 1 (si $> 0$ )
Somme	$(n+1) \frac{u_0 + u_n}{2}$	$u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$
Modèle	croissance linéaire	croissance exponentielle

## Méthode | Les algorithmes au programme

Trois algorithmes types reviennent constamment. En Python :

(a) Calcul du terme  $u_n$  d'une suite récurrente ( $u_0 = 2$ ,  $u_{n+1} = 3u_n - 1$ ) :

```

1 def terme(n):
2     u = 2                                # terme initial u_0
3     for k in range(n):                  # on applique n fois la relation
4         u = 3*u - 1
5     return u

```

(b) Recherche de seuil (plus petit  $n$  tel que  $u_n > S$ ) :

```

1 def seuil(S):
2     u, n = 2, 0
3     while u <= S:                        # tant qu'on n'a pas dépasse S
4         u = 3*u - 1
5         n = n + 1
6     return n

```

(c) Factorielle  $n! = 1 \times 2 \times \dots \times n$  :

```

1 def factorielle(n):
2     f = 1
3     for k in range(1, n+1):
4         f = f * k
5     return f

```

## 5 Exercices

### Exercice 1 ★★ : Calculer des termes

1. Soit  $u_n = n^2 - 5n + 3$ . Calculer  $u_0$ ,  $u_1$ ,  $u_3$  et  $u_{10}$ .
2. Soit  $(v_n)$  définie par  $v_0 = 4$  et  $v_{n+1} = 2v_n - 3$ . Calculer  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $v_3$ .
3. Soit  $(w_n)$  définie par  $w_1 = 1$  et  $w_{n+1} = w_n + \frac{1}{n}$  pour  $n \geq 1$ . Calculer  $w_2$ ,  $w_3$ ,  $w_4$ .

### Exercice 2 ★★ : Arithmétique ou géométrique ?

Pour chaque suite, dire si elle est arithmétique, géométrique, ou aucune des deux, en précisant la raison.

- |                         |                          |
|-------------------------|--------------------------|
| a) $u_n = 7 - 3n$       | c) $u_n = n^2$           |
| b) $u_n = 5 \times 2^n$ | d) $u_n = \frac{4}{3^n}$ |

### Exercice 3 ★★ : Terme général

1.  $(u_n)$  est arithmétique de premier terme  $u_0 = 5$  et de raison  $r = -2$ . Donner  $u_n$ , puis calculer  $u_{20}$ .
2.  $(v_n)$  est géométrique de premier terme  $v_0 = 3$  et de raison  $q = 2$ . Donner  $v_n$ , puis calculer  $v_{10}$ .
3.  $(t_n)$  est arithmétique avec  $t_2 = 7$  et  $t_5 = 19$ . Déterminer la raison, puis  $t_0$  et  $t_n$ .

### Exercice 4 ★★ : Sens de variation

Étudier le sens de variation de chaque suite (en justifiant par le signe de  $u_{n+1} - u_n$ ).

- |                    |                          |
|--------------------|--------------------------|
| a) $u_n = 3n + 1$  | c) $u_n = n^2 - n$       |
| b) $u_n = 10 - 2n$ | d) $u_n = \frac{n}{n+1}$ |

### Exercice 5 ★★ : Sommes

Calculer les sommes suivantes.

1.  $S = 1 + 2 + 3 + \dots + 50$ .
2.  $T = 2 + 4 + 6 + \dots + 100$ .
3.  $U = 1 + 3 + 9 + 27 + \dots + 3^8$ .

### Exercice 6 ★★ : Pourcentages et coefficient multiplicateur

1. Un loyer de 600 € augmente de 2 % par an. On note  $L_n$  le loyer après  $n$  années ( $L_0 = 600$ ). Justifier que  $(L_n)$  est géométrique, donner  $L_n$ , puis calculer  $L_5$  (arrondi au centime).
2. Une voiture de 18000 € perd 15 % de sa valeur par an. Au bout de combien d'années vaut-elle moins de la moitié de sa valeur initiale ? (On pourra calculer quelques termes.)

**Exercice 7** ★★★ : Deux modèles concurrents

Pour s'abonner à une salle de sport, deux offres :

- **Offre A** : 30 € le premier mois, puis +5 € chaque mois.
- **Offre B** : 20 € le premier mois, puis +10 % chaque mois.

On note  $a_n$  et  $b_n$  le prix du mois  $n$  (avec  $a_1 = 30$ ,  $b_1 = 20$ ).

1. Préciser la nature de chaque suite et donner  $a_n$  et  $b_n$ .
2. Calculer le prix du 12<sup>e</sup> mois pour chaque offre.
3. Quelle offre coûte le moins cher le premier mois ? Le douzième mois ?

**Exercice 8** ★★★ : Variation : rapport et fonction associée

1. Soit  $u_n = \frac{3^n}{n+1}$  pour  $n \geq 0$  (termes  $> 0$ ). Étudier le sens de variation à l'aide du rapport  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ .
2. Soit  $v_n = \frac{2n-1}{n+3}$ . Étudier le sens de variation à l'aide de la fonction  $f(x) = \frac{2x-1}{x+3}$  sur  $[0; +\infty[$ .

**Exercice 9** ★★★ : Un motif géométrique

On dispose des jetons en « L » emboîtés. À l'étape  $n$ , la figure  $F_n$  est un carré de côté  $n$  rempli de jetons ; on note  $c_n$  le nombre de jetons.

1. Donner  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$ ,  $c_4$  et conjecturer une formule explicite pour  $c_n$ .
2. Combien ajoute-t-on de jetons pour passer de  $F_n$  à  $F_{n+1}$  ? Écrire la relation de récurrence correspondante.
3. En déduire (en additionnant) que  $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$  : la somme des  $n$  premiers entiers impairs.

**Exercice 10** ★★★ : Recherche de seuil

Soit  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 100$  et  $u_{n+1} = 0,9 u_n$ .

1. Donner la nature de  $(u_n)$  et son terme général.
2. Vers quoi semble tendre  $(u_n)$  ? Justifier intuitivement.
3. Déterminer, par le calcul ou par essais, le plus petit rang  $n$  tel que  $u_n < 10$ .
4. Compléter l'algorithme ci-dessous pour qu'il renvoie ce rang :

```

1 def seuil() :
2     u, n = 100, 0
3     while ..... :
4         u = .....
5         n = n + 1
6     return n

```

**Exercice 11** ★★★ : Somme géométrique appliquée

Chaque année, le 1<sup>er</sup> janvier, on verse 1000 € sur un compte rémunéré à 3 % par an. On note  $C_k$  le capital total juste après le  $k$ -ième versement.

1. Expliquer pourquoi, juste après le  $n$ -ième versement, le capital vaut

$$C_n = 1000 \left( 1 + 1,03 + 1,03^2 + \cdots + 1,03^{n-1} \right).$$

2. En déduire une expression de  $C_n$  sous forme close.
3. Calculer le capital total juste après le 10<sup>e</sup> versement (arrondi à l'euro).

**Exercice 12** ★★★ : Démonstrations de cours

1. Redémontrer la formule du terme général d'une suite géométrique de raison  $q$  et de premier terme  $u_0$ .
2. Redémontrer, par la méthode «  $S - qS$  », que pour  $q \neq 1$  :  $\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ .
3. En déduire la valeur de  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n}$ , puis conjecturer sa limite quand  $n \rightarrow +\infty$ .

**Exercice 13** ★★★ : Suite auxiliaire (arithmético-géométrique)

Soit  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 1$  et  $u_{n+1} = 0,5 u_n + 3$ .

1. Calculer  $u_1, u_2, u_3$ . La suite semble-t-elle arithmétique ? géométrique ?
2. On pose  $v_n = u_n - 6$ . Montrer que  $(v_n)$  est géométrique : préciser sa raison et  $v_0$ .
3. En déduire l'expression de  $v_n$ , puis de  $u_n$ , en fonction de  $n$ .
4. Étudier le sens de variation de  $(u_n)$  et conjecturer sa limite.

**Exercice 14** ★★★ : Quand le multiplicatif rattrape l'additif

Deux populations de poissons dans deux lacs. Dans le lac A :  $A_0 = 5000$  et on perd 200 poissons par an. Dans le lac B :  $B_0 = 1000$  et la population augmente de 12 % par an.

1. Donner la nature et le terme général de  $(A_n)$  et  $(B_n)$ .
2. Calculer  $A_{10}$  et  $B_{10}$ .
3. À l'aide d'une table de valeurs (ou d'un algorithme), déterminer la première année où le lac B contient strictement plus de poissons que le lac A.
4. Commenter : que se passe-t-il « à long terme » ? (croissance linéaire vs exponentielle).

**Exercice 15** ★★★ : Conjecturer une limite

Soit  $(u_n)$  définie pour  $n \geq 1$  par  $u_n = \frac{4n^2 + 1}{2n^2 + n}$ .

1. Calculer  $u_1, u_{10}, u_{100}, u_{1000}$  (valeurs approchées). Conjecturer la limite.
2. En factorisant par  $n^2$  en haut et en bas, justifier intuitivement cette limite.

3. Soit  $w_n = \frac{(-1)^n}{n}$ . Calculer  $w_1, \dots, w_5$ . La suite est-elle monotone ? Vers quoi tend-elle ?

## 6 Problème : *La Tour de Hanoï* ★★★

### Problème style prépa

La **Tour de Hanoï** est un casse-tête célèbre. On dispose de trois piquets et de  $n$  disques de tailles toutes différentes, empilés sur le premier piquet du plus grand (en bas) au plus petit (en haut). On veut déplacer toute la tour sur un autre piquet en respectant deux règles : **(R1)** on ne déplace qu'un disque à la fois ; **(R2)** on ne pose jamais un disque sur un disque plus petit. On note  $u_n$  le **nombre minimal de déplacements** nécessaires pour déplacer une tour de  $n$  disques. Ce problème mobilise tout le chapitre : récurrence, suite auxiliaire géométrique, terme général, somme géométrique et seuil.

### Partie A : Modélisation et récurrence

1. Vérifier « à la main » que  $u_1 = 1$ ,  $u_2 = 3$  et  $u_3 = 7$ .
2. Pour déplacer  $n + 1$  disques, on doit d'abord déplacer les  $n$  disques du dessus sur le piquet intermédiaire, puis déplacer le grand disque, puis redéplacer les  $n$  petits par-dessus. En déduire que, pour tout  $n \geq 1$  :

$$u_{n+1} = 2 u_n + 1.$$

3. La suite  $(u_n)$  est-elle arithmétique ? géométrique ? Justifier que ce n'est ni l'une ni l'autre.

### Partie B : Suite auxiliaire et terme général

4. On pose  $v_n = u_n + 1$ . Montrer que  $(v_n)$  est géométrique ; préciser sa raison et son premier terme  $v_1$ .
5. En déduire l'expression de  $v_n$ , puis montrer que pour tout  $n \geq 1$  :

$$u_n = 2^n - 1.$$

6. Retrouver ainsi  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$  et calculer  $u_{10}$ .
7. Montrer que  $u_n$  est **impair** pour tout  $n \geq 1$ .

### Partie C : L'ordre de grandeur (la légende)

8. La légende parle d'une tour de 64 disques. Donner  $u_{64} = 2^{64} - 1$  et expliquer pourquoi c'est de l'ordre de  $1,8 \times 10^{19}$ .
9. À raison d'un **déplacement par seconde** sans interruption, combien d'années faudrait-il (sachant qu'une année compte environ  $3,15 \times 10^7$  secondes) ? Comparer à l'âge de l'Univers ( $\approx 1,4 \times 10^{10}$  ans).
10. **Recherche de seuil.** Déterminer le plus petit nombre de disques  $n$  tel que  $u_n > 1\,000\,000$ .

### Partie D : Une somme (pour aller plus loin)

11. On joue successivement à Hanoï avec 1, puis 2, ..., puis  $N$  disques. Le nombre **total** de déplacements est  $T_N = u_1 + u_2 + \dots + u_N$ . À l'aide de  $u_n = 2^n - 1$  et de la formule de la somme géométrique, montrer que :

$$T_N = 2^{N+1} - 2 - N.$$

12. Vérifier la formule pour  $N = 3$  en additionnant directement  $u_1 + u_2 + u_3$ .
13. **(Réflexion)** Pour  $N$  grand,  $T_N$  se comporte-t-il davantage comme  $2^{N+1}$  ou comme  $N$  ? Qu'est-ce que cela illustre du chapitre ?

## 7 ✓ Corrigés détaillés

### Intuition | Comment lire un corrigé

Ne te contente pas de vérifier le résultat final : lis chaque étape en te demandant « pourquoi a-t-on le droit de faire ça ? ». Les corrigés ci-dessous détaillent **tous** les calculs intermédiaires et rappellent à chaque fois la méthode utilisée. Cache la solution, cherche par toi-même, puis compare.

### Corrigé 1

#### Démonstration

**1. Forme explicite : on remplace  $n$  par sa valeur dans  $u_n = n^2 - 5n + 3$ .**

$$u_0 = 0^2 - 5 \times 0 + 3 = 0 - 0 + 3 = 3.$$

$$u_1 = 1^2 - 5 \times 1 + 3 = 1 - 5 + 3 = -1.$$

$$u_3 = 3^2 - 5 \times 3 + 3 = 9 - 15 + 3 = -3.$$

$$u_{10} = 10^2 - 5 \times 10 + 3 = 100 - 50 + 3 = 53.$$

Ici on « se téléporte » : aucun terme précédent n'est nécessaire.

**2. Forme récurrente : on part de  $v_0 = 4$  et on applique  $v_{n+1} = 2v_n - 3$  à chaque étape.**

$$v_1 = 2v_0 - 3 = 2 \times 4 - 3 = 8 - 3 = 5.$$

$$v_2 = 2v_1 - 3 = 2 \times 5 - 3 = 10 - 3 = 7.$$

$$v_3 = 2v_2 - 3 = 2 \times 7 - 3 = 14 - 3 = 11.$$

On est **obligé** de calculer  $v_1$  puis  $v_2$  avant d'obtenir  $v_3$  : c'est le « pas à pas ».

**3. Même principe avec  $w_1 = 1$  et  $w_{n+1} = w_n + \frac{1}{n}$  (attention, le premier terme est  $w_1$ ).**

$$w_2 = w_1 + \frac{1}{1} = 1 + 1 = 2.$$

$$w_3 = w_2 + \frac{1}{2} = 2 + 0,5 = 2,5.$$

$$w_4 = w_3 + \frac{1}{3} = 2,5 + 0,333... \approx 2,833.$$

(Cette suite, qui ajoute  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$ , est la célèbre « série harmonique » : on la recroisera plus tard.)



## Corrigé 2

## Démonstration

**Réflexe :** pour trancher, on teste la différence  $u_{n+1} - u_n$  (arithmétique si constante) et le rapport  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  (géométrique si constant).

a)  $u_n = 7 - 3n$ .

$$u_{n+1} - u_n = (7 - 3(n+1)) - (7 - 3n) = 7 - 3n - 3 - 7 + 3n = -3.$$

La différence vaut  $-3$ , indépendante de  $n$  : la suite est **arithmétique de raison**  $r = -3$ .

b)  $u_n = 5 \times 2^n$ .

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{5 \times 2^{n+1}}{5 \times 2^n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2^{(n+1)-n} = 2.$$

Le rapport vaut 2, indépendant de  $n$  : la suite est **géométrique de raison**  $q = 2$ . (La différence  $5 \times 2^{n+1} - 5 \times 2^n = 5 \times 2^n$  dépend de  $n$  : ce n'est pas arithmétique.)

c)  $u_n = n^2$ . Différence :  $(n+1)^2 - n^2 = 2n+1$  (dépend de  $n$ , pas arithmétique). Rapport :  $\frac{(n+1)^2}{n^2}$  (dépend de  $n$ , pas géométrique). **Ni l'une ni l'autre.**

d)  $u_n = \frac{4}{3^n} = 4 \times 3^{-n}$ .

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{4 \times 3^{-(n+1)}}{4 \times 3^{-n}} = 3^{-(n+1)-(-n)} = 3^{-1} = \frac{1}{3}.$$

Le rapport est constant : **géométrique de raison**  $q = \frac{1}{3}$ .

## Corrigé 3

## Démonstration

1. Suite arithmétique : on applique  $u_n = u_0 + nr$  avec  $u_0 = 5$  et  $r = -2$  :

$$u_n = 5 + n \times (-2) = 5 - 2n, \quad u_{20} = 5 - 2 \times 20 = 5 - 40 = -35.$$

2. Suite géométrique : on applique  $v_n = v_0 q^n$  avec  $v_0 = 3$  et  $q = 2$  :

$$v_n = 3 \times 2^n, \quad v_{10} = 3 \times 2^{10} = 3 \times 1024 = 3072.$$

3. On connaît  $t_2 = 7$  et  $t_5 = 19$ . **Étape 1 : trouver la raison.** Entre le rang 2 et le rang 5, il y a  $5 - 2 = 3$  pas de raison  $r$ , donc  $t_5 = t_2 + 3r$  :

$$19 = 7 + 3r \implies 3r = 12 \implies r = 4.$$

**Étape 2 : trouver  $t_0$ .** On a  $t_2 = t_0 + 2r$ , soit  $7 = t_0 + 2 \times 4 = t_0 + 8$ , d'où  $t_0 = -1$ .

**Étape 3 : conclure.**  $t_n = t_0 + nr = -1 + 4n$ . On vérifie :  $t_2 = -1 + 8 = 7 \checkmark$  et  $t_5 = -1 + 20 = 19 \checkmark$ .

## Corrigé 4

## Démonstration

**Méthode universelle : on calcule et on simplifie  $u_{n+1} - u_n$ , puis on regarde son signe.**

a)  $u_n = 3n + 1$ .

$$u_{n+1} - u_n = (3(n+1) + 1) - (3n + 1) = 3n + 3 + 1 - 3n - 1 = 3.$$

$3 > 0$  pour tout  $n$  : la suite est **strictement croissante**.

b)  $u_n = 10 - 2n$ .

$$u_{n+1} - u_n = (10 - 2(n+1)) - (10 - 2n) = 10 - 2n - 2 - 10 + 2n = -2.$$

$-2 < 0$  : la suite est **strictement décroissante**.

c)  $u_n = n^2 - n$ .

$$u_{n+1} - u_n = ((n+1)^2 - (n+1)) - (n^2 - n) = n^2 + 2n + 1 - n - 1 - n^2 + n = 2n.$$

Pour  $n \geq 1$ ,  $2n > 0$  : la suite croît ; au rang  $n = 0$ ,  $u_1 - u_0 = 0$  (on a  $u_0 = 0$  et  $u_1 = 0$ ). La suite est donc **croissante** (strictement à partir de  $n = 1$ ).

d)  $u_n = \frac{n}{n+1}$ . On met au même dénominateur  $(n+1)(n+2)$  :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{(n+1)^2 - n(n+2)}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2 + 2n + 1 - n^2 - 2n}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

Ce quotient est  $> 0$  pour tout  $n$  : la suite est **strictement croissante** (et tous ses termes restent inférieurs à 1).

## Corrigé 5

## Démonstration

1. Somme des entiers de 1 à 50 (formule de Gauss  $\frac{n(n+1)}{2}$  avec  $n = 50$ ) :

$$S = 1 + 2 + \dots + 50 = \frac{50 \times 51}{2} = \frac{2550}{2} = 1275.$$

2. On factorise par 2 pour se ramener à la somme précédente :

$$T = 2 + 4 + \dots + 100 = 2(1 + 2 + \dots + 50) = 2 \times 1275 = 2550.$$

(Autre méthode : c'est une somme arithmétique de 50 termes, premier 2, dernier 100, donc  $T = 50 \times \frac{2+100}{2} = 50 \times 51 = 2550$ .)

3.  $U = 1 + 3 + 9 + \dots + 3^8$  est une somme **géométrique** de raison  $q = 3$ , des rangs 0 à 8 (soit 9

termes). On applique  $\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$  avec  $n = 8$  :

$$U = \frac{1-3^9}{1-3} = \frac{1-19683}{-2} = \frac{-19682}{-2} = 9841.$$

(On a utilisé  $3^9 = 19683$ .)

## Corrigé 6

### Démonstration

1. Augmenter de 2 % revient à multiplier par le coefficient  $1 + \frac{2}{100} = 1,02$ . Donc  $L_{n+1} = 1,02 L_n$  : la suite  $(L_n)$  est **géométrique de raison** 1,02, de premier terme  $L_0 = 600$ . Son terme général est :

$$L_n = 600 \times 1,02^n.$$

Calcul de  $L_5$  : on calcule  $1,02^5$  par étapes :  $1,02^2 = 1,0404$ , puis  $1,02^4 = 1,0404^2 \approx 1,08243$ , puis  $1,02^5 \approx 1,08243 \times 1,02 \approx 1,10408$ . Donc

$$L_5 = 600 \times 1,10408 \approx 662,45 \text{ €}.$$

2. La valeur perd 15 % par an, soit un coefficient  $1 - 0,15 = 0,85$  :  $V_n = 18000 \times 0,85^n$ . On cherche quand  $V_n < 9000$  (la moitié de 18000), c'est-à-dire  $0,85^n < 0,5$ . On calcule les puissances successives :

$$0,85^1 = 0,85, \quad 0,85^2 = 0,7225, \quad 0,85^3 \approx 0,614, \quad 0,85^4 \approx 0,522, \quad 0,85^5 \approx 0,444.$$

La première fois que l'on passe sous 0,5 est au rang 5. La voiture vaut moins de la moitié de sa valeur à partir de la 5<sup>e</sup> année.

## Corrigé 7

### Démonstration

1. Offre A : on ajoute 5 € chaque mois, c'est **arithmétique** de raison  $r = 5$ , premier terme  $a_1 = 30$ . Comme le premier terme est au rang 1, on écrit  $a_n = a_1 + (n-1)r$  :

$$a_n = 30 + 5(n-1) = 30 + 5n - 5 = 25 + 5n.$$

Offre B : on augmente de 10 % chaque mois, coefficient 1,1, c'est **géométrique** de raison  $q = 1,1$ , premier terme  $b_1 = 20$ . On écrit  $b_n = b_1 q^{n-1}$  :

$$b_n = 20 \times 1,1^{n-1}.$$

2. Prix du 12<sup>e</sup> mois :

$$a_{12} = 25 + 5 \times 12 = 25 + 60 = 85 \text{ €}.$$

$$b_{12} = 20 \times 1,1^{11} \approx 20 \times 2,853 \approx 57,06 \text{ €} \quad (\text{car } 1,1^{11} \approx 2,853).$$

3. Le premier mois : A coûte 30 € et B coûte 20 €, donc **B est moins cher**. Le douzième mois : A coûte 85 € et B environ 57 €, donc **B reste moins cher**. Attention toutefois : B croît de façon exponentielle et finira par dépasser A si l'on attend assez longtemps.

## Corrigé 8

### Démonstration

1. Les termes  $u_n = \frac{3^n}{n+1}$  sont strictement positifs, on peut donc comparer le rapport à 1 :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3^{n+1}}{n+2} \times \frac{n+1}{3^n} = 3 \times \frac{n+1}{n+2} = \frac{3n+3}{n+2}.$$

Ce rapport est  $> 1$  si et seulement si  $3n+3 > n+2$ , c'est-à-dire  $2n+1 > 0$ , ce qui est **toujours vrai**. Donc  $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$  pour tout  $n$  : la suite est **strictement croissante**.

2. On étudie la fonction associée  $f(x) = \frac{2x-1}{x+3}$  sur  $[0; +\infty[$  (forme  $\frac{u}{v}$ , dérivée  $\frac{u'v-uv'}{v^2}$ ) :

$$f'(x) = \frac{2(x+3) - (2x-1) \times 1}{(x+3)^2} = \frac{2x+6-2x+1}{(x+3)^2} = \frac{7}{(x+3)^2}.$$

Comme  $(x+3)^2 > 0$ , on a  $f'(x) > 0$  :  $f$  est strictement croissante sur  $[0; +\infty[$ . Or  $v_n = f(n)$ , donc  $(v_n)$  est **strictement croissante** (ses termes s'approchent de 2 sans l'atteindre).

## Corrigé 9

*Démonstration*

1. Un carré de côté  $n$  est formé de  $n$  lignes de  $n$  jetons, soit  $n \times n = n^2$  jetons :

$$c_1 = 1, \quad c_2 = 4, \quad c_3 = 9, \quad c_4 = 16.$$

On conjecture  $c_n = n^2$  (la suite des carrés parfaits).

2. Pour passer du carré de côté  $n$  à celui de côté  $n + 1$ , on ajoute une colonne ( $n$  jetons), une ligne ( $n$  jetons) et le jeton du coin : au total  $n + n + 1 = 2n + 1$  jetons. D'où la récurrence :

$$c_{n+1} = c_n + (2n + 1).$$

3. En partant de  $c_1 = 1$  et en ajoutant les « équerres » successives  $3, 5, 7, \dots, (2n - 1)$ , on obtient :

$$c_n = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1).$$

Mais on a aussi  $c_n = n^2$ . En identifiant les deux expressions :

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2.$$

La somme des  $n$  premiers nombres impairs est exactement  $n^2$  : un résultat très élégant, démontré ici par un simple dessin.

**Corrigé 10***Démonstration*

1.  $u_{n+1} = 0,9 u_n$  : la suite est **géométrique de raison**  $q = 0,9$ , de premier terme  $u_0 = 100$ . Donc  $u_n = 100 \times 0,9^n$ .
2. Comme  $0 < q < 1$ , les puissances  $0,9^n$  se rapprochent de 0 quand  $n$  grandit (chaque terme vaut 90 % du précédent). Donc  $u_n \rightarrow 0$  : la suite **décroît vers 0**.
3. On cherche le plus petit  $n$  tel que  $u_n < 10$ , soit  $100 \times 0,9^n < 10$ , c'est-à-dire  $0,9^n < 0,1$ . On calcule (calculatrice) :

$$0,9^{20} \approx 0,1216, \quad 0,9^{21} \approx 0,1094, \quad 0,9^{22} \approx 0,0985.$$

La première valeur sous 0,1 est au rang 22. Le plus petit rang cherché est donc  $n = 22$ .

4. L'algorithme compte les étapes tant qu'on n'est pas passé sous 10 :

```

1 def seuil():
2     u, n = 100, 0
3     while u >= 10 :           # tant que pas encore sous 10
4         u = 0.9 * u
5         n = n + 1
6     return n

```

## Corrigé 11

## Démonstration

1. Raisonnons sur l'âge de chaque versement. Le versement fait il y a  $k$  années a été placé pendant  $k$  années, donc multiplié  $k$  fois par 1,03. Juste après le  $n$ -ième versement : le versement d'aujourd'hui vaut 1000, celui de l'an dernier  $1000 \times 1,03$ , ..., le tout premier  $1000 \times 1,03^{n-1}$ . En additionnant :

$$C_n = 1000(1 + 1,03 + 1,03^2 + \dots + 1,03^{n-1}).$$

2. La parenthèse est une somme géométrique de raison 1,03 à  $n$  termes (rangs 0 à  $n-1$ ) :

$$1 + 1,03 + \dots + 1,03^{n-1} = \frac{1 - 1,03^n}{1 - 1,03} = \frac{1 - 1,03^n}{-0,03} = \frac{1,03^n - 1}{0,03}.$$

Donc  $C_n = 1000 \times \frac{1,03^n - 1}{0,03}$ .

3. Pour  $n = 10$  :  $1,03^{10} \approx 1,34392$ , donc

$$C_{10} = 1000 \times \frac{1,34392 - 1}{0,03} = 1000 \times \frac{0,34392}{0,03} \approx 1000 \times 11,464 \approx 11\,464 \text{ €}.$$

On a versé  $10 \times 1000 = 10\,000$  € ; les intérêts rapportent environ 1 464 €.

## Corrigé 12

## Démonstration

1. **Terme général géométrique.** Par définition,  $u_{k+1} = q u_k$  pour tout  $k$ . En appliquant cette relation depuis  $k = 0$  :

$$u_1 = q u_0, \quad u_2 = q u_1 = q^2 u_0, \quad u_3 = q u_2 = q^3 u_0, \quad \dots$$

À chaque étape on multiplie une fois de plus par  $q$ . Après  $n$  étapes, on a multiplié  $n$  fois :  $u_n = u_0 q^n$ .

2. **Somme géométrique.** Posons  $S = 1 + q + q^2 + \dots + q^n$ . Multiplions par  $q$  :

$$qS = q + q^2 + \dots + q^{n+1}.$$

Soustrayons les deux lignes ; tous les termes « du milieu » disparaissent (télescopage) :

$$S - qS = (1 + q + \dots + q^n) - (q + \dots + q^{n+1}) = 1 - q^{n+1}.$$

Donc  $S(1 - q) = 1 - q^{n+1}$ , et comme  $q \neq 1$  on divise par  $1 - q \neq 0$  :

$$S = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

3. Avec  $q = \frac{1}{2}$  et  $n + 1$  termes (rangs 0 à  $n$ ) :

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) = 2 - \frac{1}{2^n}.$$

Quand  $n \rightarrow +\infty$ ,  $\frac{1}{2^n} \rightarrow 0$ , donc cette somme **tend vers 2**. (On « remplit » progressivement une longueur de 2 sans jamais la dépasser.)

### Corrigé 13

#### Démonstration

1. On calcule pas à pas à partir de  $u_0 = 1$  :

$$u_1 = 0,5 \times 1 + 3 = 3,5, \quad u_2 = 0,5 \times 3,5 + 3 = 4,75, \quad u_3 = 0,5 \times 4,75 + 3 = 5,375.$$

Les différences (2,5 ; 1,25 ; 0,625) ne sont pas constantes : pas arithmétique. Les rapports (3,5 ; 1,36 ; 1,13) ne sont pas constants non plus : pas géométrique.

2. On pose  $v_n = u_n - 6$ . Calculons  $v_{n+1}$  en fonction de  $v_n$  :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 6 = (0,5 u_n + 3) - 6 = 0,5 u_n - 3.$$

On factorise par 0,5 pour faire apparaître  $u_n - 6$  :

$$0,5 u_n - 3 = 0,5 (u_n - 6) = 0,5 v_n.$$

Donc  $v_{n+1} = 0,5 v_n$  : la suite  $(v_n)$  est **géométrique de raison 0,5**, avec  $v_0 = u_0 - 6 = 1 - 6 = -5$ .

3. On en déduit  $v_n = v_0 \times 0,5^n = -5 \times 0,5^n$ , puis, comme  $u_n = v_n + 6$  :

$$u_n = 6 - 5 \times 0,5^n.$$

4. Étudions le sens de variation :

$$u_{n+1} - u_n = -5(0,5^{n+1} - 0,5^n) = -5 \times 0,5^n (0,5 - 1) = -5 \times 0,5^n \times (-0,5) = 2,5 \times 0,5^n.$$

C'est  $> 0$  pour tout  $n$  : la suite est **croissante**. Comme  $0,5^n \rightarrow 0$ , on conjecture  $u_n \rightarrow 6$  (la suite monte vers 6 sans l'atteindre).

### Corrigé 14

#### Démonstration

1. Lac A : on retire 200 poissons par an, c'est **arithmétique** de raison  $-200$  :  $A_n = 5000 - 200n$ .

Lac B : on augmente de 12 % par an, coefficient 1,12, c'est **géométrique** :  $B_n = 1000 \times 1,12^n$ .

- 2.

$$A_{10} = 5000 - 200 \times 10 = 5000 - 2000 = 3000.$$

$$B_{10} = 1000 \times 1,12^{10} \approx 1000 \times 3,106 \approx 3106.$$

3. On compare année par année autour de  $n = 10$  :

$$B_9 = 1000 \times 1,12^9 \approx 2773 \quad \text{et} \quad A_9 = 5000 - 1800 = 3200 \Rightarrow B_9 < A_9,$$

$$B_{10} \approx 3106 \quad \text{et} \quad A_{10} = 3000 \Rightarrow B_{10} > A_{10}.$$

La première année où le lac B dépasse le lac A est donc  $n = \boxed{10}$ .

4. La population A décroît linéairement (elle finira même par s'annuler vers  $n = 25$ ), tandis que B croît de façon exponentielle, sans limite. À long terme, B écrase A : c'est la leçon du chapitre, **le multiplicatif l'emporte toujours sur l'additif**.

## Corrigé 15

### Démonstration

1. On calcule (avec  $u_n = \frac{4n^2+1}{2n^2+n}$ ) :

$$u_1 = \frac{4+1}{2+1} = \frac{5}{3} \approx 1,667, \quad u_{10} = \frac{401}{210} \approx 1,910,$$

$$u_{100} \approx 1,990, \quad u_{1000} \approx 1,999.$$

Les valeurs s'approchent de 2 : on **conjecture**  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$ .

2. On factorise par  $n^2$  (le terme de plus haut degré) en haut et en bas :

$$u_n = \frac{n^2 \left(4 + \frac{1}{n^2}\right)}{n^2 \left(2 + \frac{1}{n}\right)} = \frac{4 + \frac{1}{n^2}}{2 + \frac{1}{n}}.$$

Quand  $n \rightarrow +\infty$ ,  $\frac{1}{n} \rightarrow 0$  et  $\frac{1}{n^2} \rightarrow 0$ , donc  $u_n \rightarrow \frac{4+0}{2+0} = \frac{4}{2} = 2$ . La conjecture est confirmée.

3.  $w_n = \frac{(-1)^n}{n}$  :  $w_1 = -1$ ,  $w_2 = 0,5$ ,  $w_3 \approx -0,333$ ,  $w_4 = 0,25$ ,  $w_5 = -0,2$ . La suite **n'est pas monotone** : elle change de signe à chaque terme (elle « oscille »). Mais sa valeur absolue  $|w_n| = \frac{1}{n}$  tend vers 0, donc  $w_n \rightarrow 0$  : une suite peut tendre vers une limite **sans être monotone**.

## Corrigé du problème : La Tour de Hanoï

### Démonstration / Partie A : modélisation

1. Avec 1 disque, un seul déplacement suffit :  $u_1 = 1$ . Avec 2 disques : on pose le petit sur le piquet libre (1), on déplace le grand à destination (1), on repose le petit sur le grand (1), soit  $u_2 = 3$ . Avec 3 disques, en appliquant la même idée on trouve  $u_3 = 7$  (on le retrouvera en B).

2. Pour déplacer  $n+1$  disques d'un piquet à un autre, la seule stratégie optimale est :

- (i) déplacer les  $n$  disques du dessus sur le piquet intermédiaire : cela coûte  $u_n$  déplacements (par définition, c'est le minimum pour  $n$  disques) ;
- (ii) déplacer le plus grand disque, seul, vers le piquet d'arrivée : 1 déplacement ;
- (iii) redéplacer les  $n$  disques par-dessus le grand : encore  $u_n$  déplacements.

Au total :  $u_{n+1} = u_n + 1 + u_n = 2u_n + 1$ .

3. La différence  $u_{n+1} - u_n = u_n + 1$  dépend de  $n$  (pas arithmétique). Le rapport  $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2u_n + 1}{u_n} = 2 + \frac{1}{u_n}$  dépend aussi de  $n$  (pas géométrique). La suite n'est donc **ni arithmétique ni géométrique** : d'où l'idée d'une suite auxiliaire.



## Démonstration / Partie B : suite auxiliaire et terme général

4. On pose  $v_n = u_n + 1$ . Calculons  $v_{n+1}$  :

$$v_{n+1} = u_{n+1} + 1 = (2u_n + 1) + 1 = 2u_n + 2 = 2(u_n + 1) = 2v_n.$$

Donc  $(v_n)$  est **géométrique de raison 2**, de premier terme  $v_1 = u_1 + 1 = 1 + 1 = 2$ .

5. Comme le premier terme est au rang 1 :  $v_n = v_1 \times 2^{n-1} = 2 \times 2^{n-1} = 2^n$ . Puis, en revenant à  $u_n = v_n - 1$  :

$$u_n = 2^n - 1.$$

6. Vérification :  $u_1 = 2^1 - 1 = 1$ ,  $u_2 = 2^2 - 1 = 3$ ,  $u_3 = 2^3 - 1 = 7$  : tout concorde. Et  $u_{10} = 2^{10} - 1 = 1024 - 1 = 1023$ .

7. Pour  $n \geq 1$ ,  $2^n$  est pair (multiple de 2), donc  $u_n = 2^n - 1$  est **impair** (un pair moins 1).

## Démonstration / Partie C : ordre de grandeur

8. Pour 64 disques :  $u_{64} = 2^{64} - 1$ . Comme  $2^{10} = 1024 \approx 10^3$ , on a

$$2^{64} = 2^4 \times (2^{10})^6 \approx 16 \times (10^3)^6 = 16 \times 10^{18} = 1,6 \times 10^{19}$$

(la valeur exacte est environ  $1,8 \times 10^{19}$ ).

9. À raison d'un déplacement par seconde, la durée en années est :

$$\frac{1,8 \times 10^{19}}{3,15 \times 10^7} \approx 5,7 \times 10^{11} \text{ années,}$$

soit environ 570 milliards d'années. C'est plus de 40 fois l'âge de l'Univers ( $\approx 1,4 \times 10^{10}$  ans) : la tour ne sera jamais achevée.

10. On cherche le plus petit  $n$  tel que  $u_n > 1\,000\,000$ , soit  $2^n - 1 > 10^6$ , c'est-à-dire  $2^n > 1\,000\,001$ . Or  $2^{19} = 524\,288$  (trop petit) et  $2^{20} = 1\,048\,576$  (assez grand). Donc  $\boxed{n = 20}$ , avec  $u_{20} = 1\,048\,575$ .

## Démonstration / Partie D : une somme

11. On somme les  $u_n = 2^n - 1$  pour  $n$  de 1 à  $N$  :

$$T_N = \sum_{n=1}^N (2^n - 1) = \left( \sum_{n=1}^N 2^n \right) - \left( \sum_{n=1}^N 1 \right) = \left( \sum_{n=1}^N 2^n \right) - N.$$

La somme  $\sum_{n=1}^N 2^n = 2 + 2^2 + \dots + 2^N$  est géométrique de raison 2, premier terme 2,  $N$  termes :

$$2 + 2^2 + \dots + 2^N = 2 \times \frac{1 - 2^N}{1 - 2} = 2(2^N - 1) = 2^{N+1} - 2.$$

Donc  $T_N = 2^{N+1} - 2 - N$ .

12. Pour  $N = 3$  : directement  $u_1 + u_2 + u_3 = 1 + 3 + 7 = 11$ . Avec la formule :  $2^4 - 2 - 3 = 16 - 5 = 11$ .  
✓

13. Le terme  $2^{N+1}$  croît de façon exponentielle, tandis que  $-N$  est négligeable devant lui : pour  $N$

grand,  $T_N$  se comporte comme  $2^{N+1}$ . Cela illustre une dernière fois la leçon centrale : **la croissance géométrique domine complètement la croissance linéaire.**

**Bilan de la fiche.** Tu sais maintenant : reconnaître et manipuler les suites arithmétiques ( $u_n = u_0 + nr$ ) et géométriques ( $u_n = u_0 q^n$ ), étudier un sens de variation, calculer les sommes  $\frac{n(n+1)}{2}$  et  $\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ , modéliser une évolution à pourcentage constant, et conjecturer une limite. Le réflexe « suite auxiliaire géométrique » (problème) te resservira toute l'année.